

## Article

---

« Modélisation du comportement hydraulique des déversoirs d'orage latéraux en régime transcritique »

M. Buyer, J. Vazquez et B. Bremond

*Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, vol. 18, n° 1, 2005, p. 25-46.

Pour citer cet article, utiliser l'information suivante :

URI: <http://id.erudit.org/iderudit/705548ar>

DOI: 10.7202/705548ar

Note : les règles d'écriture des références bibliographiques peuvent varier selon les différents domaines du savoir.

---

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter à l'URI <https://apropos.erudit.org/fr/usagers/politique-dutilisation/>

---

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche. Érudit offre des services d'édition numérique de documents scientifiques depuis 1998.

Pour communiquer avec les responsables d'Érudit : [info@erudit.org](mailto:info@erudit.org)

# Modélisation du comportement hydraulique des déversoirs d'orage latéraux en régime transcritique

## Numerical modelling of the hydraulic behaviour of lateral storm weirs in a transcritical regime

M. BUYER<sup>1</sup>, J. VAZQUEZ<sup>2\*</sup>, B. BREMOND<sup>3</sup>

Reçu le 22 janvier 2004, accepté le 29 juillet 2004\*\*.

### SUMMARY

In recent years, French and European legislation has introduced regulations about wastewater discharge into natural environments and particularly about combined sewer overflows. As a consequence, it has become essential to control the hydraulic behaviour of these structures and to estimate the pollution loads released at this level. The side weir is the regulation structure that permits the hydraulic regulation of the waste water carried by the sewer system. When the upstream flow intensity exceeds a value referred to as reference flow, the side weir directly rejects part of the waste water to the natural environment. The hydraulic behaviour of the sewer side weir was shown to involve a discontinuous evolution of the water depth, characterized by a hydraulic jump (transition from supercritical to subcritical flow) and also by a rapidly varying transcritical evolution (subcritical to supercritical).

Initially, the side weir flow was determined with the use of empirical relations. Using formulae of Engels, Coleman and Smith, Balmaceda and Gonzales or Dominguez, it was possible to calculate the outflow according to the water level at the upstream and/or the downstream region of the weir. These relations were applicable only for certain flow regimes and in certain cases in which the geometry of the side weir was specified. Subsequently, a more physical approach, initiated by Ackers, was based on the assumption of constant energy along the side weir. This approach made it possible to focus not only on an assessment of the side channel flow, but also on the water profile at the crest. Unfortunately, as the study of El Kashab shows, this method falls short in certain cases because the equations are inappropriate. For example, in the case of hydraulics the constant energy approach was not applicable. Finally, the method that is currently used is based on a momentum equation,

1. LEGTA (Lycée d'Enseignement Général et Technique Agricole) d'Obernai, France.
2. Département Eau et Environnement, École Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg, 1 quai Koch, BP 1039 F, 67070 Strasbourg, France.
3. CEMAGREF (Centre d'Étude du Machinisme Agricole, du Génie Rural et des Eaux et Forêts) de Bordeaux.

\* Correspondance: Tél.: (33) 3 88 24 82 79 - Fax: (33) 3 88 24 82 24 - E.mail: jvazquez@engees.u-strasbg.fr

\*\* Les commentaires seront reçus jusqu'au 28 février 2006.

which makes it possible to establish equations for shallow water. This approach seemed the most appropriate in the case of the side weir. The numerical solution of these equations was always based on an algorithm that describes all the possible cases according to the flow regime and the hydraulic conditions in the side weir. One must know the flow regime a priori. These models don't properly simulate the transitory behaviour of these kinds of works.

In this article we propose hydraulic modelling of a sewer side weir that integrates the geometrical characteristics of the flow (height and length of the crest, variation of width along the crest), and avoids the need for a priori knowledge of flow conditions in the side weir. The model also takes into account hydraulic discontinuities (hydraulic jump, transitions from free surface to pressurised flow) and the transitory character of the flow. The numerical results were compared with measured values obtained from a test bench.

For the 1D approach, the solution was found using the 1D shallow water equations written in a conservative form for a transitory situation. The conservative characters of the equations permit us to consider gradually and rapidly varied flows in a single system of equations. In order to account for the lateral overflow, we used the Hager relation, which involves the intensity and direction of the lateral velocity vector and also the influence of width variation of the side weir. The shallow water equations system couldn't be analytically solved. As a consequence, numerous numerical methods have been developed such as characteristic methods or finite difference methods. Unfortunately, these methods are inadequate when discontinuities such as hydraulic jumps or flow regime transitions (froude number close to 1) appear. To solve these problems, numerical (shock capturing) schemes were developed, based on a finite volume formulation. Godunov was the initiator of this type of finite volume numerical scheme. Eleuterio improved the precision and the ability of these numerical schemes to converge. The result was a combination of total variation diminishing (TVD) interpolation with an appropriate Riemann solver. We used a second order TVD Upwind shock capturing numerical method associated with the Roe Riemann solver.

In order to validate the numerical model, we have built a sewer side weir physical test bench at the Obernai site. The variable parameters were the downstream pipe diameter in comparison with the upstream pipe diameter, the side weir length, slopes of the upstream and downstream pipes and the height of the crest. The tested cases permitted us to sweep a slope ranging from 0.5‰ to 1‰ for the upstream and downstream pipes.

Globally, 114 configurations have been tested with the 1D numerical model. The operating curve represents a criterion for characterising the operating of the storm overflow. As long as the upstream flow does not reach the reference value, there is no overflow. As soon as the upstream flow exceeds the value, the downstream flow remains close to the reference value. Because comparisons were made in relation with the upstream flow, the criterion used for judging the modelling performance was the absolute error value in relation to the upstream flow. It is important to note that the results need to be weighted as experimental measurements have a margin of error of approximately 5%.

Comparisons between numerical and experimental results permit the following conclusions:

1. The distribution of the number of errors was very close to the normal Gaussian distribution curve, with a slight shift towards the positive side. This indicates that the errors were random and therefore very close to experimental values.
2. In general, the maximum errors varied from - 10 to 13%, with the majority of cases occurring between - 5 and + 5%. This shows that the performance of

the tool was very useful in cases that are as complex as side weirs. However, the model has a slight tendency to overestimate the overflow rate as compared to experimental measurements.

**Keywords :** *modeling, combined sewer overflow, transcritical flow, numerical scheme, TVD*

## RÉSUMÉ

Le comportement hydraulique des déversoirs d'orage latéraux est le plus souvent marqué par une évolution discontinue de la ligne d'eau caractérisée par le ressaut hydraulique (Torrentiel/fluvial) et, dans certains cas, par une évolution rapidement variée causée par un écoulement également transcritique mais dans le sens fluvial/Torrentiel. Concernant les modèles actuels, ils ne permettent pas de simuler le comportement en transitoire de ce type d'ouvrage. Compte tenu de cela, nous avons modélisé l'ouvrage par les équations de Barré de Saint-Venant écrite sous forme conservative en régime transitoire et couplée au modèle de déversoir de Hager. Le caractère conservatif de ces équations permet de transcrire dans un seul système d'équations les écoulements graduellement et rapidement variés. Afin de résoudre ces équations, nous avons utilisé le schéma numérique UPWIND à « capture de choc » du second ordre du type TVD (Total Variation Diminishing) utilisant le solveur de Roe. Dans l'objectif de valider notre démarche, nous avons créé un pilote de déversoir d'orage sur le site d'Obernai (laboratoire d'hydraulique du lycée agricole). Nous avons fait varier : le diamètre de la conduite aval par rapport au diamètre de la conduite amont, la longueur du déversoir, les pentes des conduites amont et aval ainsi que la hauteur de crête. La comparaison des débits déversés entre les modèles physique et numérique a montré que l'erreur observée rapportée au débit amont n'excédait jamais 13 % avec une majorité des cas entre  $\pm 5$  %.

**Mots clés :** *modélisation, déversoir d'orage, écoulement transcritique, schéma numérique, TVD.*

## 1 - INTRODUCTION

Depuis quelques années, les législations européennes et françaises (loi sur l'eau de 1992 et arrêté du 22 décembre 1994) prévoient une réglementation des rejets dans le milieu naturel et notamment une surveillance des rejets des déversoirs d'orage. Il devient donc indispensable de maîtriser leur comportement hydraulique et de pouvoir mesurer ou évaluer le flux de pollution rejeté à leur niveau. Devant cette nécessité, un projet « déversoir d'orage » a été lancé en 1995. Ce projet regroupe différents partenaires tels que l'ENGES, Veolia Water, Anjou Recherche, la Direction Technique des Services Opérationnels (DTSO), et le Groupement pour l'Évaluation des Mesures et Composants en Eau et Assainissement (GEMCEA) et est soutenu financièrement par le Fonds National pour le Développement de l'Adduction d'Eau (FNDAE). Son objectif principal est de proposer un guide technique destiné aux techniciens et ingénieurs dans le but d'améliorer les connaissances et de proposer des modèles de fonctionnement hydraulique des déversoirs d'orage.

Il a été programmé en cinq phases :

1. Étude bibliographique de la modélisation des déversoirs d'orage.
2. Typologie et classification.
3. Mise en place d'un banc d'essai numérique.
4. Mise en place d'un banc d'essai physique.
5. Exploitation et traitement des résultats.

Cet article s'intéresse à la phase 3 : la modélisation numérique des déversoirs d'orage latéraux. Dans ce chapitre, nous allons d'abord décrire le rôle d'un déversoir dans un réseau d'assainissement. Nous montrerons ensuite comment on peut caractériser son fonctionnement par rapport à ses objectifs. Enfin, nous montrerons les principaux comportements hydrauliques associés à ses ouvrages. Cette étape nous permettra d'en déduire des critères déterminants devant apparaître dans la modélisation des déversoirs d'orage.

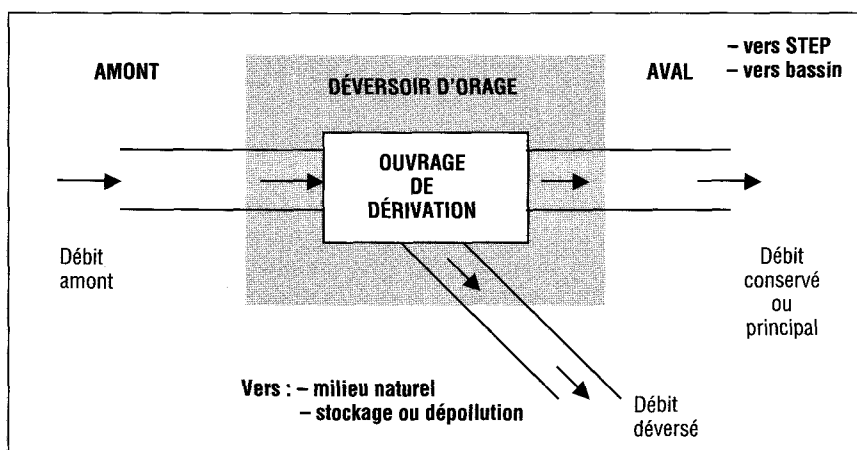
### 1.1 Présentation du déversoir d'orage

Un déversoir d'orage est un ouvrage de contrôle permettant une régulation hydraulique des effluents en réseau d'assainissement (figure 1).

Il rejette directement une partie des effluents au milieu naturel lorsque le débit à l'amont dépasse une certaine valeur que l'on appelle réglementairement « débit de référence ». Les déversoirs d'orage sont généralement installés sur les réseaux unitaires dans le but de limiter les apports au réseau aval pour protéger les populations urbaines des inondations et la station d'épuration d'une surcharge hydraulique en cas de pluie.

Un déversoir d'orage doit assurer trois fonctions principales :

- laisser transiter le débit des eaux usées de temps sec sans déversement et sans faire trop chuter la vitesse de l'écoulement afin de limiter la décantation des matières en suspension présentes dans l'effluent ;



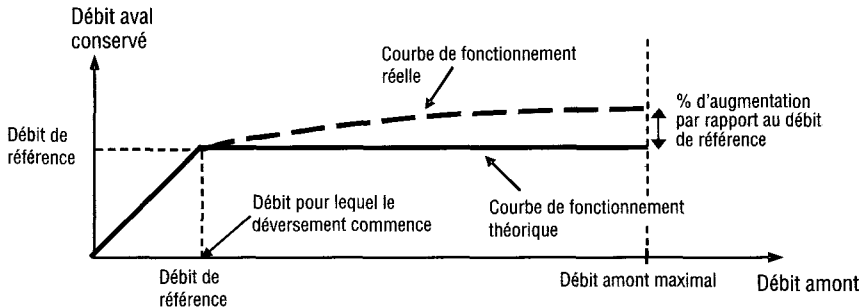
**Figure 1** Schéma de principe du déversoir d'orage.

*General diagram of combined sewer overflows.*

- laisser transiter le débit de référence, c'est-à-dire le débit maximal admis à l'aval, sans déversement ;

- déverser le débit excédentaire de pluie (au-delà du débit de référence) sans mise en charge, sans favoriser la décantation dans la conduite amont et sans surcharge excessive de débit dans le réseau à l'aval.

D'un point de vue hydraulique, le fonctionnement peut être caractérisé par la courbe suivante (???) :

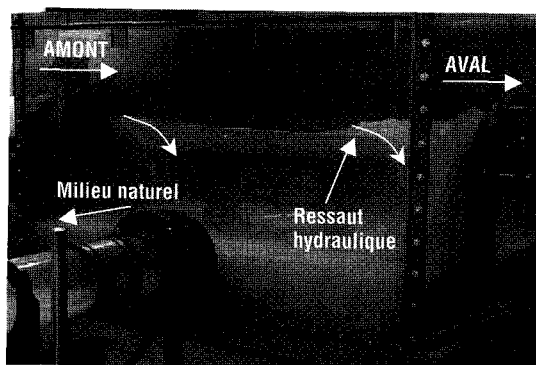


**Figure 2** Principe de fonctionnement hydraulique du déversoir d'orage.  
*Hydraulic principle of the combined sewer overflows.*

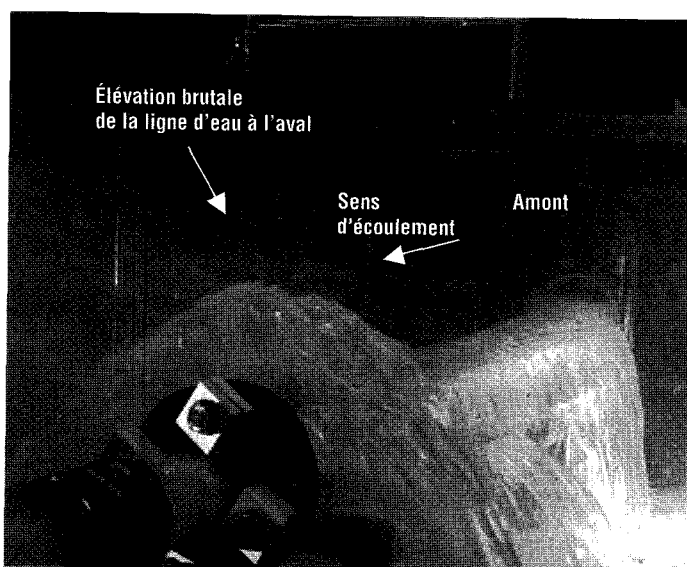
La courbe de fonctionnement théorique représente le cas de régulation idéal dans lequel quel que soit le débit amont supérieur au débit de référence, le débit conservé est égal au débit de référence. La création d'un tel déversoir nécessite une régulation dynamique représentée par exemple par une vanne autorégulée ou par une pompe. Dans le cas des déversoirs statiques, la courbe réelle nous montre que quel que soit le déversoir, à partir du moment où le débit amont dépasse le débit de référence, le débit aval va continuer à augmenter. La caractérisation d'un déversoir va donc se faire en calculant le pourcentage d'augmentation du débit aval par rapport au débit de référence et ceux pour un débit amont maximal.

Afin de montrer la complexité du fonctionnement de ces ouvrages, la figure 3 représente un déversoir d'orage latéral en cours de déversement. On constate qu'il déverse un peu à l'amont et beaucoup à l'aval de la crête alors qu'en partie centrale, il n'y a pas de déversement. Aux deux tiers de la crête déversante, on a une élévation rapide de la ligne d'eau qui représente un ressaut hydraulique. L'étude en laboratoire [BUYER, 2001] a montré que, pour les déversoirs latéraux, le ressaut hydraulique est souvent présent soit au droit de la crête déversante, soit dans les conduites amont ou aval de l'ouvrage.

La figure 4 représente un déversoir à crête haute. On constate une mise en charge de la conduite aval ainsi qu'une diminution de la section entre l'entrée et la sortie. Les effets de l'entonnement et de la mise en charge de la conduite aval génèrent une élévation importante de la ligne d'eau à l'aval.



**Figure 3** Fonctionnement d'un déversoir d'orage latéral à seuil bas.  
*Operation of low crest combined sewer overflows.*



**Figure 4** Fonctionnement d'un déversoir latéral à seuil haut.  
*Operation of high crest combined sewer overflows.*

## 1.2 Les modèles de déversoir existants

Dans le but de déterminer le comportement hydraulique de ce type d'ouvrages et en particulier d'obtenir une courbe de fonctionnement, il est nécessaire dans la formulation des équations et dans le modèle associé de tenir compte de la géométrie de la crête (entonnement), d'un éventuel passage en charge, des conditions aux limites, des discontinuités hydrauliques pouvant apparaître dans l'ouvrage et du régime d'écoulement transitoire. On donne dans ce qui suit un aperçu des relations et méthodes disponibles pour étudier les déversoirs.

Initialement, les débits déversés par l'intermédiaire de ces ouvrages ont été évalués à travers l'utilisation de **relations empiriques**. Ces équations sont toutes bâties à partir de résultats expérimentaux. On trouve par exemple dans le livre de Carlier [CARLIER, 1972] les formules de Engels, de Coleman et Smith, de Balmaceda et Gonzales ou encore de Dominguez qui permettent le calcul du débit déversé en fonction des valeurs de hauteur d'eau à l'amont et/ou à l'aval du déversoir. Ces relations ne sont applicables qu'en fluvial ou torrentiel mais pas en régime transcritique et uniquement pour certaines géométries de déversoir.

Puis, une approche plus physique initiée par Ackers [ACKERS, 1957] basée sur un raisonnement à **énergie constante** a permis de progresser dans la connaissance du comportement hydraulique du déversoir. En particulier, cette approche a permis de s'intéresser non seulement à l'évaluation du débit déversé mais également à la forme de la ligne d'eau sur la crête du déversoir. Malheureusement, comme le montre l'étude de El Kashab [EL KHASHAB, 1975], cette méthode tombe en défaut dans le cas de l'apparition, dans l'ouvrage, d'un ressaut hydraulique, lieu de dissipation d'énergie.

Pour finir, on utilise actuellement une méthode basée sur un bilan de **quantité de mouvement** qui permet d'établir les équations de Barré de Saint-Venant. Cette approche semble la plus adaptée au cas du déversoir et les problèmes rencontrés pour le raisonnement à énergie constante n'apparaissent plus avec cette démarche.

Comme l'ont fait Robinson et McGhee [ROBINSON et MCGHEE, 1993] et Carleton [CARLETON, 1985], la résolution numérique de ces équations est toujours basée sur un algorithme qui décrit tous les cas possibles en fonction des régimes d'écoulement et des conditions hydrauliques dans le déversoir. Il est donc nécessaire de connaître ou d'émettre une hypothèse sur le régime d'écoulement avant calcul. Or, l'ouvrage perturbe l'écoulement en raison de la variabilité du débit. Ainsi, faire l'hypothèse que le régime d'écoulement sera toujours le même à l'amont ou à l'aval du déversoir peut s'avérer hasardeux. Cette méthode devient obsolète en régime transitoire.

### 1.3 But de l'étude

On propose dans cet article une modélisation du comportement hydraulique des déversoirs d'orage permettant :

- d'intégrer les caractéristiques géométriques de l'ouvrage (hauteur et longueur de crête, entonnement du déversoir),
- de s'affranchir de la connaissance préalable des conditions hydrauliques de l'écoulement dans le déversoir,
- de prendre en compte les discontinuités hydrauliques (ressaut hydraulique, passage en charge),
- de prendre en compte le caractère transitoire de l'écoulement.

Cette résolution est basée sur le système d'équation de Barré de Saint-Venant pris sous forme conservative. L'algorithme de résolution met en œuvre un schéma numérique aux volumes finis explicite de type TVD (Total Variation Diminishing) [HARTEN, 1983] capable de prendre en compte et de localiser cor-



rectement les discontinuités en régime transitoire. Les résultats obtenus grâce au modèle numérique sont comparés à des valeurs expérimentales relevées sur un banc d'essai physique de déversoir.

## 2 – ÉQUATIONS DE BARRÉ DE SAINT-VENANT

### 2.1 Formulation conservative de BSV

Dans cette étude, nous avons utilisé un système de Barré de Saint-Venant adapté à la problématique du déversoir d'orage c'est-à-dire tenant compte du déversement latéral et d'un éventuel entonnement. Ce système est présenté dans ce qui suit.

Le système d'équation hyperbolique de Barré de Saint-Venant (BSV) peut être mis sous forme conservative et sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{G}(\mathbf{U})$$

On définit également les vecteurs suivants [CUNGE *et al.*, 1980] :

- Vecteur écoulement:  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$

- Vecteur flux:  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gl_1 \end{pmatrix}$

- Vecteur source:  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} Q_{\text{dév}} \\ gl_2 + gA(S_0 - S_f) + \frac{Q_{\text{dév}} Q}{A} \end{pmatrix}$

Les notations adoptées sont les suivantes :

A: Section mouillée, Q: Débit,  $Q_{\text{dév}}$ : le débit déversé par unité de longueur,  $S_0$ : Pente de fond du canal,  $S_f$ : Correspond aux pertes de charges dues aux frottements sur les parois du collecteur. Sa valeur est obtenue par des relations de nature empirique dont la plus utilisée est la relation de Manning-Strickler donnée par :

$$S_f = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R_h^{4/3}}$$

$R_h$  le rayon hydraulique et  $n$  le coefficient de Manning.

Les forces de pression sont calculées en tenant compte des propriétés géométriques du canal.  $l_1$  provient du terme de pression hydrostatique et  $l_2$  provient de la force de pression due à la variation de la largeur du canal.

Ces forces s'expriment de la manière suivante [VILA, 1986] :

$$l_1 = \int_0^h (h - \eta) B d\eta ; l_2 = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial B}{\partial x} d\eta$$

où  $h$  : hauteur d'eau ;  $\eta$  : variable d'intégration indiquant la distance depuis le fond du canal ;  $B(x, \eta)$  largeur du canal à la distance  $\eta$  du lit du canal qui s'exprime :

$$B(x, \eta) = \frac{\partial A(x, \eta)}{\partial \eta}$$

## 2.2 Expression du débit déversé

Le débit déversé correspond à une variation du débit amont en fonction de la direction longitudinale :

$$Q_{\text{dév}} = \frac{dQ}{dx}$$

Souvent, on utilise la relation de Poléni valable pour le déversoir frontal. Celle-ci est donnée par :

$$\frac{dQ}{dx} = C_d \sqrt{2g} (h - w)^{3/2}$$

où  $C_d$  est appelé coefficient de débit, dépendant de la hauteur de crête  $w$  et de la forme de la crête.

Ainsi, le déversoir latéral est considéré comme une succession de déversoirs frontaux de longueur  $dx$ . Les travaux de Hager [HAGER, 1999] ont permis de tenir compte du déversement latéral. En effet, une série de coefficients, appliqués à la relation de Poléni, permet de tenir compte des effets de :

- la pente de fond du déversoir,
- l'intensité de la vitesse latérale ( $u$ ),
- la direction de la vitesse latérale,
- l'effet d'un entonnement éventuel dans le déversoir.

La relation de Hager [HAGER, 1987], valable pour le cas permanent, est :

$$Q_{\text{dév}} = \frac{dQ}{dx} = -\frac{3}{5} n^* c \sqrt{gH^3} (y - W)^{3/2} \times \left( \frac{1 - W}{3 - 2y - W} \right)^{1/2} \times \left[ 1 - \theta \left( \frac{3(1 - y)}{y - W} \right)^{1/2} \right]$$

où :

$\theta$  : Angle d'entonnement  $\theta$ .

$n^*$  : Nombre de crêtes déversantes.  $n^* = \{1 ; 2\}$ .

$c$  : Coefficient de forme du déversoir ( $c = 1$  dans le cas où le déversoir a une paroi mince).

$H = \frac{V^2}{2g} + h$  : la charge spécifique et  $V$  : la vitesse de l'eau.

$y = \frac{h}{H}$  : Variable adimensionnelle de hauteur d'eau.

$W = \frac{w}{H}$  : Variable adimensionnelle de hauteur de crête.

### 3 – SCHÉMA NUMÉRIQUE

Ne pouvant être résolues analytiquement que dans des cas particuliers [BENAYADA, 1994], de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour résoudre ces équations. On citera la méthode des caractéristiques [GRAF et ALTINAKAR, 1996] et les méthodes aux différences finies [KOVACS, 1988]. Malheureusement celles-ci tombent en défaut lorsqu'apparaissent des discontinuités du type ressaut hydraulique ou encore des changements de régime d'écoulement (Nombre de Froude proche de 1) [MESELHE et HOLLY, 1997]. Depuis les années 80 des schémas numériques dits à « capture de chocs » ont été mis au point. Ils sont issus du couplage d'une interpolation à diminution de variation totale (TVD) avec un solveur du problème de Riemann approprié. L'initiateur de ce type de schéma numérique est Godunov [GODUNOV, 1959] qui en 1959 mit au point le premier schéma numérique aux volumes finis. Depuis la précision et la capacité à converger de ces schémas ont été améliorées. Le paragraphe suivant détaille la discrétisation ainsi que le schéma numérique.

#### 3.1 Discrétisation et schéma numérique aux volumes finis

Le principe de la résolution du système de BSV par cette méthode commence par une discrétisation volumique du domaine de calcul en sous domaines de contrôle dans lesquels les variables sont considérées comme constantes.

On s'intéresse dans un premier temps à l'équation sans second membre :

$$U_t + F(U)_x = 0$$

On applique alors le théorème de Green :

$$\int_{\text{volume}} (U dx - F(u) dt) = 0$$

où on intègre l'équation aux dérivées partielles à résoudre sur le volume de contrôle [ELEUTERIO, 1997].

D'où :

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, t_2) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_L, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_R, t)) dt$$

En posant :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t) dx$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t + \Delta t) dx$$

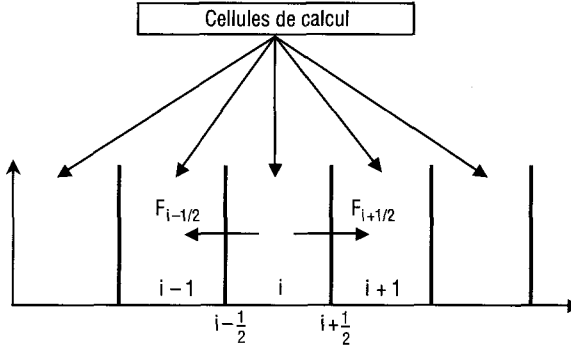
$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U(x_L, t)) dt$$

$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U(x_R, t)) dt$$

On met en indice la position de la cellule considérée et en exposant le pas de temps auquel la valeur a été calculée.

On note  $U_i^n$  la valeur du vecteur écoulement dans la cellule  $i$  au pas de temps  $t$ . On nomme  $i + 1/2$  (respectivement  $i - 1/2$ ) l'interface des cellules  $i$  et  $i + 1$  (respectivement  $i - 1$  et  $i$ ). Ainsi,  $F_{i+1/2}$  représente donc le flux à l'interface entre les cellules  $i$  et  $i + 1$ .

Avec  $\Delta x$  le pas d'espace,  $\Delta t$  le pas de temps,  $i = \frac{x}{\Delta x}$  et  $n = \frac{t}{\Delta t}$  entiers,



**Figure 5** Discrétisation du canal en sous tronçons.

*Discretisation of the channel into computing cells.*

On arrive ainsi à la forme du schéma numérique suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \lambda [F_{i-1/2}^n - F_{i+1/2}^n]$$

avec :

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Celle-ci est valable pour le système d'équation sans second membre.

Le terme source est ensuite pris en compte par sommation. On obtient au final le schéma numérique appliqué à l'équation avec second membre :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \lambda [F_{i-1/2}^n - F_{i+1/2}^n] + \Delta t G_i^n$$

### 3.2 Résolution du problème de Riemann

La discrétisation du domaine de calcul ainsi que le schéma numérique présenté ci-dessus permettent de transformer le problème en la résolution d'une série de problèmes de Riemann de la forme :

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x_i, 0) = U_i \\ U(x_{i+1}, 0) = U_{i+1} \end{cases}$$

Ceux-ci sont constitués d'une équation aux dérivées partielles sans second membre associée à des conditions initiales discontinues.

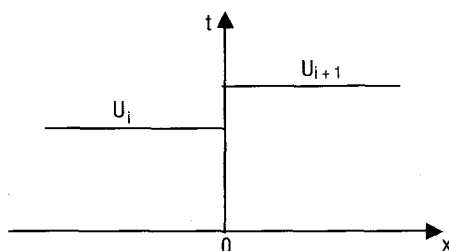
Cette succession de problèmes de Riemann est ensuite résolue à chaque pas de temps par un solveur approprié. Il en existe plusieurs types et nous nous sommes servis du plus utilisé d'entre eux. Il s'agit du solveur de Roe [ROE, 1981]. Dans ce qui suit on donne une brève description de cette méthode.

On peut réécrire le système de Barré de Saint-Venant mis sous forme matriciel sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

où :  $J = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$  est la matrice jacobienne de  $F$  par rapport à la variable  $U$ .

Les conditions initiales sont discontinues :  $U_i \neq U_{i+1}$ .



**Figure 6** Représentation d'un problème de Riemann.  
*Representation of a Riemann problem.*

Le système d'équations étant non linéaire, l'idée qu'a introduite Roe [ROE, 1981] est de déterminer la solution du problème non linéaire par une transformation linéaire. On écrit le système d'équation mis sous forme matricielle en utilisant une matrice jacobienne approchée qui doit vérifier les conditions suivantes [LÉVÊQUE, 1992] :

- Existence d'une relation linéaire entre le vecteur flux et le vecteur écoulement.

$$\Delta_{i+1/2} \tilde{F} = \tilde{J}_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} U$$

- Consistance de la matrice jacobienne approchée avec la matrice jacobienne réelle

$$\tilde{J}(U, U) = J(U)$$

La matrice Jacobienne approchée  $\tilde{J}$  dépend de  $U_i$  et  $U_{i+1}$  :  $\tilde{J}(U_i, U_{i+1})$ . Sa consistance se traduit par  $\tilde{J}(U_i, U_{i+1}) \rightarrow \tilde{J}(U)$  quand  $U_i$  et  $U_{i+1} \rightarrow U$ .

- La matrice jacobienne approchée est diagonalisable avec des valeurs propres réelles.

Les valeurs et vecteurs propres de  $\tilde{J}$  s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i+1/2}^1 &= \tilde{u}_{i+1/2} + \tilde{c}_{i+1/2} & \tilde{e}_{i+1/2}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{i+1/2}^1 \end{pmatrix} \\ \tilde{a}_{i+1/2}^2 &= \tilde{u}_{i+1/2} - \tilde{c}_{i+1/2} & \tilde{e}_{i+1/2}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{i+1/2}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{avec :}$$

On cherche donc  $\tilde{u}$  et  $\tilde{c}$  devant satisfaire les conditions préalablement énoncées et sont à déterminer.

Le système d'équations étant strictement hyperbolique, on peut alors écrire le vecteur écoulement sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice jacobienne.

On peut alors poser :

$$\Delta_{i+1/2} \tilde{U} = \sum_{k=1}^2 \alpha_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k,$$

où  $e^k$  correspondent aux valeurs propres de la matrice jacobienne  $J$  et  $\tilde{e}^k$  ceux de l'approchée  $\tilde{J}$ .

et on a :

$$\Delta_{i+1/2} \tilde{F} = \sum_{k=1}^2 \alpha_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k \tilde{a}_{i+1/2}^k$$

où :

$$\Delta_{i+1/2}(\cdot) = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i$$

On obtient après calcul, pour les valeurs de  $\alpha$  et de  $u$  :

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1/2}^{1,2} &= \frac{\Delta_{i+1/2} Q + (-\tilde{u}_{i+1/2} \pm \tilde{c}_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} A}{\pm 2 \tilde{c}_{i+1/2}} \\ \tilde{u}_{i+1/2} &= \frac{Q_i / \sqrt{A_i} + Q_{i+1} / \sqrt{A_{i+1}}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}} \end{aligned}$$

où  $\tilde{u}_{i+1/2}$  est appelé moyenne de Roe. Il faut signaler que le calcul de  $\tilde{u}_{i+1/2}$  suppose que le débit soit positif.

Les valeurs de  $c$  sont données par la relation :

$$\tilde{c}_{i+1/2}^2 = \begin{cases} g \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} & \text{si } A_{i+1} - A_i \neq 0 \\ \left( \frac{C_{i+1} + C_i}{2} \right)^2 & \text{si } A_{i+1} - A_i = 0 \end{cases}$$

Les résultats précédents nous permettent d'écrire pour le flux numérique :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \alpha_{i+1/2}^k \tilde{a}_{i+1/2}^j \tilde{e}_{i+1/2}^j$$

Cette expression du flux numérique est associée au schéma numérique présenté plus haut. Cette formulation est du premier ordre dans le temps et

dans l'espace. Sous certaines conditions, ce schéma peut donner des solutions qui violent la condition d'entropie [HIRSH, 1988]. On peut y remédier en modifiant les valeurs propres de  $\tilde{J}$  ([HARTEN et HYMAN, 1983] et [YEE, 1987]).

Pour le second ordre, on introduit un terme correctif qui permet au schéma d'être de type TVD c'est-à-dire convergent et non oscillatoire. Ce terme doit être affecté au flux numérique approché. Le concept de schéma numérique TVD a été introduit par Harten [HARTEN, 1983] et est basé sur la notion de variation totale définie par :

$$TV(\mathbf{U}^n) = \sum_i |\Delta_{i+1/2} \mathbf{U}^n|$$

et pour être TVD un schéma numérique doit vérifier :

$$TV(\mathbf{U}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{U}^n)$$

Un schéma numérique est convergent si la variation totale à chaque pas de temps est bornée et non oscillatoire si la variation totale n'augmente pas dans le temps.

Ainsi le flux numérique approché est finalement donné par la relation :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ F_i^n + F_{i+1}^n + R_{i+1/2}^n D_{i+1/2}^n \right]$$

où  $R$  représente la matrice des vecteurs propre de la jacobienne du système et  $D$  le terme correctif que nous développons par la suite.

On peut choisir pour les sections et largeurs approchées :

$$\tilde{A}_{i+1/2} = \sqrt{A_i A_{i+1}} \quad \text{et} \quad \tilde{B}_{i+1/2} = \frac{B_i + B_{i+1}}{2}$$

On approche le terme source par :

$$\tilde{G}_{i+1/2}^n = \left( 0 \right. \\ \left. g \tilde{A}_{i+1/2} S_0 - g \tilde{A}_{i+1/2} \tilde{u}_{i+1/2}^2 n^2 \left( \frac{\tilde{A}_{i+1/2}}{2 \tilde{A}_{i+1/2} / \tilde{B}_{i+1/2} + \tilde{B}_{i+1/2}} \right)^{-4/3} + Q_{\text{dev}}(\tilde{A}_{i+1/2}, \tilde{B}_{i+1/2}) \right)$$

Le schéma numérique utilisé pour résoudre les équations de Barré de Saint-Venant prend finalement la forme suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \lambda (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \frac{1}{2} (\tilde{G}_{i+1/2}^n + \tilde{G}_{i-1/2}^n)$$

La théorie ne permet pas d'assurer, le caractère non oscillatoire et la convergence, avec la prise en compte du terme source.

Nous avons testé [HAM, 2000] les capacités de quatre schémas numériques TVD [DELIS et SKEELS, 1998] à reproduire les courbes de remous et à localiser correctement un ressaut hydraulique sur un canal rectangulaire de petite taille. Comparaison faite des résultats expérimentaux et numériques, nous avons sélectionné le plus précis pour l'appliquer au cas du déversoir dans le cas circulaire. Ce schéma appartient à la catégorie des schémas TVD UPWIND du second ordre [HARTEN, 1984].

Les éléments du terme correctif  $D_{i+1/2}$  sont donnés par [HARTEN, 1984] :

$$d_{i+1/2}^k = \sigma(\tilde{a}_{i+1/2}^k) \left( L_{i+1}^k + L_i^k \right) - \psi(\tilde{a}_{i+1/2}^k + \gamma_{i+1/2}^k) \alpha_{i+1/2}^k$$

où :  $k = 1, 2$ .

Avec :

$$\sigma(a) = 1/2 (\Psi(a) - \lambda a^2)$$

et :

$$\gamma_{i+1/2}^k = \begin{cases} \sigma(\tilde{a}_{i+1/2}^k) (L_{i+1}^k - L_i^k) / \alpha_{i+1/2}^k & \text{si } \alpha_{i+1/2}^k \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+1/2}^k = 0 \end{cases}$$

La fonction limiteur de flux  $L_i^k$  peut être exprimée de la façon suivante :

$$L_i^k = \min \text{ mod } (\alpha_{i+1/2}^k, \alpha_{i-1/2}^k)$$

La fonction  $\psi$  est la correction d'entropie pour les valeurs propres  $\tilde{a}_{i+1/2}^k$  et de la forme :

$$\Psi(a) = \begin{cases} |a| & \text{si } |a| \geq \delta \\ (a^2 + \delta^2) / 2\delta & \text{si } |a| < \delta \end{cases}$$

où  $\delta$  est un petit nombre positif que l'on prend ainsi [HARTEN et HYMAN, 1983] :

$$\begin{aligned} \delta_{i+1/2} &= \max [0, \tilde{a}_{i+1/2} - a_i, a_{i+1} - \tilde{a}_{i+1/2}], \\ \delta_{i-1/2} &= \max [0, \tilde{a}_{i-1/2} - a_{i-1}, a_i - \tilde{a}_{i-1/2}]. \end{aligned}$$

### 3.3 Traitement des conditions aux limites

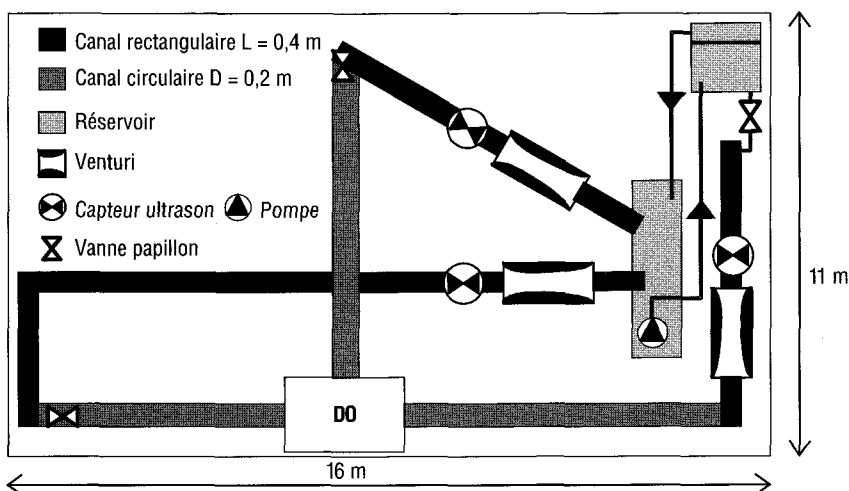
Tout schéma numérique explicite peut trouver la solution numérique en tout point à l'exception des points critiques : point entrant (amont) et point sortant (aval) dans le canal, et points où le système de Barré de Saint-Venant n'est pas applicable comme dans le cas de l'écoulement de l'eau au-dessus d'un seuil et l'écoulement de l'eau à travers une jonction. La méthode des caractéristiques [GARCIA-NAVARRO et SAVIRON, 1992] et la méthode de l'extrapolation [HIRSCH, 1990] sont les deux méthodes utilisées pour trouver la solution aux points critiques connaissant les conditions physiques en ces points.

## 4 – RÉSULTATS ET VALIDATION

### 4.1 Présentation du banc d'essai

Dans ce qui suit, on présente les résultats de la phase de validation du modèle de Barré de Saint-Venant concernant le partage des débits dans le déversoir. Les résultats expérimentaux ont été obtenus à l'aide d'un banc d'essai physique de déversoir mis en place au LEGTA d'Obernai dont le schéma est présenté ci-après :





**Figure 7** Schéma de principe du banc d'essai physique de déversoir.  
*General diagram of the physical test bench.*

Le banc d'essai est constitué d'une réserve d'eau enterrée dans laquelle est placée une pompe immergée capable de débiter  $250 \text{ m}^3/\text{h}$ . Celle-ci alimente un second bac d'une capacité d'environ  $1 \text{ m}^3$  placé en hauteur et dans lequel le niveau de l'eau reste constant. Grâce à une vanne, on garantit ainsi une alimentation du banc d'essai avec un débit contrôlé. L'arrivée de l'eau dans le collecteur circulaire amont ainsi que son retour vers le réservoir enterré après passage dans le déversoir et les canaux circulaires conservés et déversés sont assurés par des canaux rectangulaires d'une largeur de 40 cm. Les débits sont mesurés dans les branches rectangulaires amont, aval et déversée grâce à l'association d'un capteur à ultrason et d'un Venturi. Ainsi, on dispose d'une mesure pour le débit d'entrée, le débit conservé et le débit déversé ce qui permet de vérifier la conservation des débits lors des mesures.

Le diamètre des canaux circulaires est de 200 mm à l'amont et de 200, 110 et 67 mm à l'aval. Leurs pentes ainsi que celle du déversoir sont réglables grâce à des systèmes de supports montés sur tiges filetées. Les déversoirs étudiés sont de forme circulaire à crête simple ou double, de longueur 1,5 m, 1 m et 0,5 m et les hauteurs de crête étudiées varient de 30 mm à 125 mm.

Les différents cas testés ont permis de balayer une plage de pentes comprises entre 0,5 ‰ et 1 ‰ pour les canaux amont et aval. En effet, les valeurs envisagées correspondent aux pentes couramment observées dans les réseaux d'assainissements.

Globalement, 114 configurations différentes ont été testées et le tableau suivant montre les différentes valeurs expérimentées.

**Tableau 1** Configurations expérimentées.

**Table 1** Tested configurations.

Diamètre amont (mm)	200					
Diamètre aval (mm)	200	110	67			
Longueur (m)	1,5	1	0,5			
Pente amont (‰)	8	6	0,5			
Pente aval (‰)	8	6	1,3	1	0,5	
Hauteur de crête (mm)	30	50	60	75	94	125

Dans chaque configuration de pentes, le débit varie entre deux valeurs extrêmes qui correspondent pour la première à une valeur légèrement supérieure au débit de référence (Débit pour lequel le déversoir commence à déverser) et pour la seconde une valeur maximale de 150 m³/h.

Les coefficients de Strickler ont été évalués sur le banc d'essai et varient selon la pente et les débits injectés. Les mesures effectuées ont mis en évidence une plage pour le coefficient de Strickler comprise entre 95 et 115. Ainsi, nous avons utilisé une valeur moyenne de 105.

Enfin, la vanne papillon située à l'aval du canal conservé (voir figure 7) permettant de simuler des influences aval perturbe l'écoulement dans le cas d'un régime fluvial. Cette influence aval peut remonter dans le déversoir et influencer sur le débit déversé. C'est pourquoi, au niveau de la simulation, nous avons appliqué en condition à la limite aval une loi de vanne établie expérimentalement. Celle-ci permet d'associer la hauteur d'eau mesurée à 1 m à l'amont de la vanne au débit transitant dans le canal aval.

4.2 La validation des résultats numériques

La courbe de fonctionnement représente donc un critère permettant de caractériser le fonctionnement d'un déversoir d'orage. Puisque les comparaisons se font par rapport au débit amont, le critère retenu pour juger des performances de la modélisation est la valeur absolue de l'erreur rapportée au débit amont, définie comme suit :

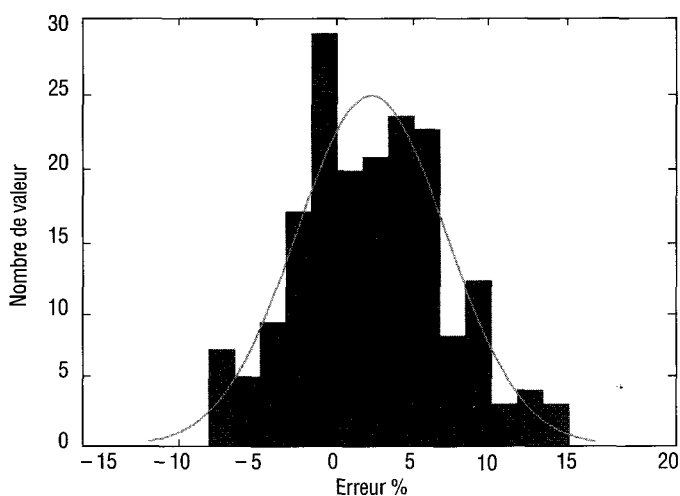
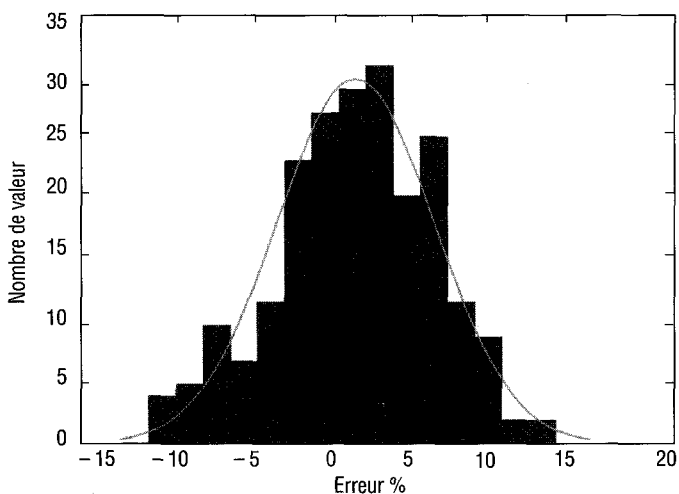
$$\text{Erreur} = 100 \cdot \left| \frac{Q_{\text{dev Mesuré}} - Q_{\text{dev CalDo}}}{Q_{\text{amont Mesuré}}} \right|$$

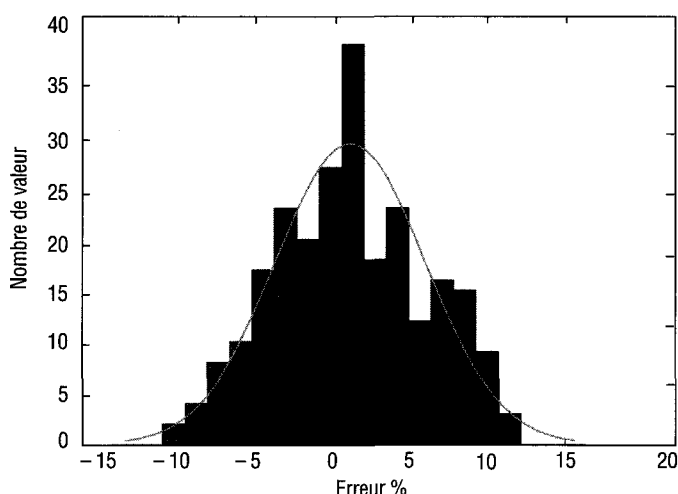
Il est important de noter que ces résultats sont à pondérer car les mesures expérimentales ont une marge d'erreur de plus ou moins 5 %.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'histogramme des erreurs, dont les principales caractéristiques sont présentées dans le tableau ci-après :

**Tableau 2** Comparaison des résultats.**Table 2** Comparison of results.

Figures	Nb de cas testés	Longueur seuil (mm)	L/D <sub>amont</sub>	Erreurs (min/max)	Commentaires
Figure 8	186	500	2,5	- 10 à 13 %	Seuil « court »
Figure 9	224	1 000	5	- 12 à 13 %	Seuil « long »
Figure 10	246	1 500	7,5	- 10 à 12 %	Seuil « très long »
<b>GLOBAL</b>	<b>656</b>	<b>/</b>	<b>2,5 à 7,5</b>	<b>- 10 à 13 %</b>	<b>Tous les cas couverts</b>

**Figure 8** Répartition des erreurs pour L = 500 mm.*Frequency of errors for L = 500 mm.***Figure 9** Répartition des erreurs pour L = 1 000 mm.*Frequency of errors for L = 1 000 mm.*



**Figure 10** Répartition des erreurs pour  $L = 1\,500\text{ mm}$ .

*Frequency of errors for  $L = 1\,500\text{ mm}$ .*

Ainsi, l'examen conjoint de l'ensemble des résultats permet de proposer les conclusions suivantes :

- la répartition du nombre d'erreurs est très proche de la courbe de la loi normale de Gauss, en étant toutefois légèrement décalée vers le positif. Cela nous indique que l'erreur est aléatoire, donc très proche des mesures expérimentales,

- d'un point de vue général, les erreurs maximales varient de  $-10$  à  $13\%$  avec une majorité des cas entre  $-5$  et  $+5\%$ . Cela indique que les performances de l'outil sont très intéressantes sur des cas aussi complexes que les déversoirs de type latéraux,

- néanmoins, l'outil de calcul a une légère tendance à surestimer le débit déversé par rapport aux mesures expérimentales. Cette source d'erreur peut provenir du fait que les équations de Barré de Saint-Venant sont valables dans le domaine transitoire alors que la relation de Hager n'est utilisable qu'en régime permanent.

## 5 – CONCLUSIONS

Nous avons mis au point un outil numérique de calcul des déversoirs d'orage latéraux permettant de calculer leur courbe de fonctionnement. La méthode numérique mise en œuvre pour résoudre les équations de Barré de Saint-Venant associée à la relation de Hager pour déterminer le débit déversé

est basée sur un schéma numérique de type TVD. Nous avons montré la capacité de la modélisation à résoudre tous les cas possibles en terme de régime d'écoulement: fluvial, torrentiel et transcritique. L'utilisation de cet outil numérique permet de simuler le déversoir non plus en tant qu'ouvrage isolé mais en tant qu'ouvrage intégré à un système de collecteurs ce qui permet de s'affranchir des problèmes de conditions aux limites à appliquer localement autour du déversoir. Il faut également noter que l'unique paramètre de calage du modèle est le coefficient de Strickler. Ainsi, les résultats expérimentaux obtenus grâce au banc d'essai ont montré que l'erreur observée sur les pourcentages de déversement du modèle numérique par rapport au débit amont n'excédait jamais 13 % avec une majorité des cas entre  $\pm 5$  %.

## ABRÉVIATIONS

a:	Valeur propre de la matrice jacobienne.
$\tilde{a}$ :	Valeur propre de la matrice jacobienne approchée.
A:	Section mouillée.
$\tilde{A}$ :	Section mouillée approchée.
B:	Largeur au miroir.
$\tilde{B}$ :	Largeur au miroir approchée.
c:	Coefficient de forme du déversoir.
$\tilde{c}$ :	Célérité de l'onde.
$C_d$ :	Coefficient de débit du déversoir.
D et d:	Terme correctif du schéma numérique.
e:	Vecteur propre de la matrice jacobienne.
$\tilde{e}$ :	Vecteur propre de la matrice jacobienne approchée.
F:	Vecteur flux.
G:	Vecteur source.
h :	Tirant d'eau.
H:	Énergie spécifique.
$I_1$ :	Terme de pression hydrostatique.
$I_2$ :	Terme de pression latérale.
J:	Matrice jacobienne.
$\tilde{J}$ :	Matrice jacobienne approchée.
L:	Limiteur.
n:	Coefficient de Manning.
$n^*$ :	Nombre de crêtes déversantes. $n^* = \{1,2\}$

Q:	Débit.
$Q_{\text{dév}}$ :	Débit déversé.
R:	Matrice des vecteurs propres.
$R_h$ :	Rayon hydraulique.
$S_0$ :	Pente du canal.
$S_f$ :	Pertes de charge dues au frottement.
P:	Périmètre mouillé.
u:	Vitesse de l'écoulement.
U:	Vecteur écoulement.
$U_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha}$ :	Dérivée partielle du vecteur U par rapport à la variable $\alpha$ .
w:	Hauteur de pelle.
$\theta$ :	Angle d'entonnement de la crête du déversoir.
$\psi$ :	Correction entropique aux valeurs propres.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ACKERS P., 1957. A theoretical consideration of side weirs as storm water overflows. *Proceedings of the ICE*, London, Vol. 6.
- BENAYADA L., 1994. Construction d'une solution analytique et critique d'algorithmes numériques afférents aux équations de Barré de Saint-Venant en vue d'applications aux écoulements transitoires sur fond mobile. Institut National Polytechnique de Toulouse, Thèse de doctorat, Spécialité mécanique des fluides. 167 p.
- BUYER M., 2001. Transport de flux en réseau d'assainissement : Modèle 1D pour l'hydraulique des collecteurs et déversoirs avec prise en compte des discontinuités. Thèse de doctorat de l'ULP de Strasbourg. 225 p.
- CARLETON M., 1985. Contribution à l'analyse et à la modélisation du fonctionnement des déversoirs d'orage. Thèse docteur ingénieur, INSA, Lyon. 250 p.
- CARLIER M., 1972. Hydraulique générale et appliquée, Eyrolles. 565 p.
- CUNGE J.A., HOLLY J.M., VERWEY A., 1980. Practical aspects of computational river hydraulics. Pitman publishing Ltd., London.
- DELIS A.I., SKEELS C.P., 1998. TVD schemes for open channel flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 26, pp. 791-809.
- EL KHASHAB A. M.M., 1975. Hydraulics of flow over side weirs. PhD Thesis University of Southampton, England.
- ELEUTERIO F. T., 1997. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction Ed. Springer. 592 p.
- GARCIA-NAVARRO P., SAVIRON, J. M., 1992. MacCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow. *J. Hydraulic Res.*, Vol 30 (1).
- GRAF W. H., ALTINAKAR M. S., 1996. Traité de Génie Civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne. Volume 16 – Hydraulique fluviale, tomes 1 et 2.
- GODUNOV S. K., 1959. Matematicheskii Sbornik, Vol. 47. 271. (In russian).
- HAGER W. H., 1987. Lateral outflow over side weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol. 113, n° 4, April.

- HAGER W. H., 1999. Wastewater Hydraulics-Theory and Practice. Ed. Springer.
- HAM S., 2000. Schémas tvd et modélisation des réseaux hydrauliques urbains. Rapport de stage « Maîtrise de Mathématiques option Ingénierie » Université Louis Pasteur Strasbourg.
- HARTEN A., 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* 49, 357-393.
- HARTEN A., hyman J.M., 1983. Self adjusting grid for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.* 50, N° 2, 235-269.
- HIRSH C., 1988. Numerical computation of internal and external flows, Vol. 1 : fundamentals of numerical discretization, Jhon Wiley & son. A Wiley interscience Publication.
- HIRSH C., 1990. Numerical computation of internal and external flows, Vol 2. Wiley, Chichester, England.
- KOVACS Y., 1988. Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement. CERGRENE - École Nationale des Ponts et Chaussées. Thèse de doctorat - Sciences et Techniques de l'Environnement. 328 p.
- LEVEQUE R.J., 1992. Numerical methods for conservation laws. Birkhauser Verlag, Basel.
- MESELHE E.A, HOLLY Jr. F.M., 1997. Invalidity of preissmann scheme for transcritical flow. *Journal of Hydraulic Engineering*. pp. 652-655.
- ROBINSON D.I., MCGHEE T.J., 1993. Computer modelling of side flow weirs. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Vol. 119, n° 6, pp 989-1005.
- ROE P.L., 1981. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*. Vol. 43, pp. 357-372 ()
- VILA J.P., 1986. Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperbolique non linéaires. Application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense. Université de Paris VI, 1986, Thèse de doctorat, Spécialité Sciences Mathématiques. 480 p.
- YEE H. C., 1987. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications, *J. Comp. Phys.*, 68, 151-179.